3. cvičení - teorie

Lebesgueův integrál je jedno z témat teorie míry a integrálu. Víc rozebrán je zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/TMI/TMI-text_2023.pdf`.

Definice. Borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ je nejmenší σ-algebra podmnožinu $\mathbb{R}^n$ obsahující všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Prvek borelovské σ-algebry nazýváme **borelovská množina**.

Definice. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **borelovsky měřitelná**, pokud pro každou borelovskou množinu B v $\mathbb{R}$ platí, že $f^{-1}(B)$ je borelovská v $\mathbb{R}^n$.

Definice. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **jednoduchá**, pokud $f(\mathbb{R}^n)$ je konečná množina.

Definice. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je jednoduchá měřitelná funkce a množiny $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou měřitelné a $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ jsou takové, že $f(x) = \begin{cases} a_1, & x \in A_1 \\ \ldots & \\ a_k, & x \in A_k. \end{cases}$ Pak Lebesgueův integrál z f je definován jako

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \lambda(A_i).$$

Věta (Fubiniova)**.** Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce na M. Označme $\pi_1(M) = \{x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon (x,y) \in M\}$. Pro $x \in \pi_1(M)$ definujme množinu $M_x = \{y \in \mathbb{R}\colon (x,y) \in M\}$. Pak platí

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\pi_1(M)} \int_{M_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Analogicky lze definovat $\pi_2(M) = \{y \in \mathbb{R}\colon \exists x \in \mathbb{R}\colon (x,y) \in M\}$ a pro $y \in \pi_2(M)$ definujme $M^y = \{x \in \mathbb{R}\colon (x,y) \in M\}$. Pak platí

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\pi_2(M)} \int_{M^y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta (o substituci)**.** Buď $G \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená množina a nechť funkce $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(G)$ a zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem $\varphi(x,y) = ((\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$ nechť je prosté. Dále předpokládejme, že determinant (tzv. jakobián)

$$J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}$$

je nenulový v každém bodě $(x,y) \in G$. Nechť $M \subseteq \varphi(G)$, množiny M a $\varphi^{-1}(M)$ jsou omezené a konvexní a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je omezená a spojitá na M. Pak platí

$$\int_M f(z,w)\,\mathrm{d}(z,w) = \int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(x,y))\,|J_\varphi(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y),$$

pokud je alespoň jeden z těchto integrálů definován.